3) g est dérivable sur $]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[$

et $g'(x)=\pi.(1+tg^2(\pi x))\neq 0$ d'où g^{-1} est

dérivable sur $g(]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[)=\mathbb{R}$

en particulier g est dérivable sur $]-\infty,0[$

4) $x\in]-\infty,0[$

$G(x)=g^{-1}(x)+g^{-1}(\frac{1}{x})$

a) g^{-1} est dérivable sur $]-\infty,0[$

la fonction $U: x\mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $]-\infty,0[$

et $U(]-\infty,0[)=]-\infty,0[$

g^{-1} est dérivable sur $]-\infty,0[$

d'où la fonction : $x\mapsto g^{-1}(\frac{1}{x})$ est dérivable sur $]-\infty,0[$

par suite G est dérivable sur $]-\infty,0[$

$G'(x)=(g^{-1})'(x)+(\frac{1}{x})'.(g^{-1})'(\frac{1}{x})$

$G'(x)=(g^{-1})'(x)-\frac{1}{x^2}.(g^{-1})'(\frac{1}{x})$

calculons $(g^{-1})'(x)$ pour $x\in]-\infty,0[$

on pose $y=g^{-1}(x)$ $x\in]-\infty,0[$, $y\in\left]-\frac{1}{2},0\right[$

$g(y)=x \rightarrow tg(\pi y)=x$

$(g^{-1})'(x)=\frac{1}{g'(y)}=\frac{1}{\pi.(1+tg^2(\pi y))}=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$

d'où $G'(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}-\frac{1}{x^2}.\frac{1}{\pi(1+\frac{1}{x^2})}=0 \quad \forall x\in]-\infty,0[$

b) $G'(x)=0$; $\forall x\in]-\infty,0[$

d'où G est une fonction constante sur $]-\infty,0[$.

$G(-1)=g^{-1}(-1)+g^{-1}(-1)=2g^{-1}(-1)=\frac{-1}{2}$

car $g(\frac{-1}{4})=-1$, $g^{-1}(-1)=\frac{-1}{4}$

$\Rightarrow g^{-1}(x)+g^{-1}(\frac{1}{x})=\frac{-1}{2}$

$\Rightarrow g^{-1}(x)=\frac{-1}{2}-g^{-1}(\frac{1}{x})$; $\forall x\in]-\infty,0[$

EX 13 :

$h(x)=\cot g(\frac{x}{2})$; $x\in]0,\pi]$

1) $h'(x)=-\frac{1}{2}(1+cotg^2\frac{x}{2})<0$

h est continue et strictement décroissante sur $]0$

elle réalise donc une bijection de $]0,\pi]$

sur $h(]0,\pi])=\left[h(\pi),\lim_{0^+}h\right[=[0,+\infty[=\mathbb{R}_+$

2) $\varphi=h^{-1}$

f est dérivable sur $]0,\pi]$

et $h'(x)=\frac{-1}{2}(1+\cot g^2(\frac{x}{2}))\neq 0$

d'où φ est dérivable sur $h(]0,\pi])=\mathbb{R}_+$

$\varphi'(x)=\frac{1}{h'(\varphi(x))}$ $(y=\varphi(x)\ ;\ h(y)=x)$

$=\frac{1}{-\frac{1}{2}(1+\cot g^2(\frac{y}{2}))}=\frac{-2}{1+(h(y))^2}$

$\varphi'(x)=\frac{-2}{1+x^2}$

b) $\psi'(x)=\varphi(\frac{1}{x})$; $x\in]0,+\infty[$

$\psi'(x)=-\frac{1}{x^2}.\varphi'(\frac{1}{x})=-\frac{1}{x^2}(\frac{-2}{1+\frac{1}{x^2}})$

$\psi'(x)=\frac{2}{1+x^2}$

c) $h(\frac{\pi}{2})=1 \Rightarrow \varphi(1)=\frac{\pi}{2}$

on pose : $f(x)=\varphi(x)+\psi(x)$

f est dérivable sur $]0,+\infty[$

$f'(x)=\varphi'(x)+\psi'(x)=0$

f est constante sur $]0,+\infty[$

$f(1)=\varphi(1)+\psi(1)=\pi$

d'où $f(x)=\pi$; $\forall x\in]0,+\infty[$

$\Rightarrow \varphi(x)+\psi(x)=\pi$ pour $x>0$

Qarray.tn-Aqra Blech-Qarray.tn